

Capítulo 2

Variables aleatorias. Variables discretas. Función de probabilidad. Variables continuas. Función de densidad. Propiedades

Aunque el temario oficial separa las variables aleatorias, por un lado, y la esperanza matemática y la varianza, por otro, desde el punto de vista conceptual ambos bloques forman una sola unidad didáctica.

No tiene demasiado sentido estudiar una variable aleatoria sin estudiar inmediatamente cómo se resume su comportamiento mediante la esperanza y la varianza. La función de probabilidad o densidad describe cómo se distribuye la variable, mientras que la esperanza y la varianza permiten resumir, respectivamente, su valor medio y su dispersión.

Por este motivo, en estos apuntes se estudiarán conjuntamente las variables aleatorias discretas y continuas, junto con su esperanza y varianza, en el tema siguiente, capítulo 3.

En nuestro temario se explica de forma conjunta para facilitar su comprensión. El índice que se seguirá será el siguiente:

1. **Variables aleatorias discretas y continuas.** Se estudiará la diferencia entre variables discretas y continuas, sus funciones de masa o densidad, sus funciones de distribución, sus propiedades, el cálculo de probabilidades, la esperanza matemática y la varianza.
2. **Función generatriz de momentos y función característica.** Se estudiarán en un bloque separado, primero desde un punto de vista general y después aplicadas a cada una de las distribuciones vistas.
3. **Distribuciones de probabilidad.** Se analizarán las principales distribuciones discretas y continuas, manteniendo siempre una misma estructura: cuándo se utilizan, parámetros, dominio o soporte, función de masa o densidad, función de distribución, esperanza, varianza, cálculo de probabilidades, funciones generatriz y característica, y ejemplos.
4. **Acotación de Tchebychev.** Finalmente, se estudiará la desigualdad de Tchebychev como resultado general basado en la esperanza y la varianza.

Comenzamos, por tanto, toda esta redistribución ya en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Esperanza matemática. Propiedades. Varianza. Propiedades. Función característica y función generatriz de momentos. Acotación de Tchebychev

En este capítulo explicaremos los temas 2 y 3 de las oposiciones a Diplomado del Estado, de forma conjunta.

Conocimientos para empezar este tema

Expresión del enunciado	Interpretación matemática
“al menos”, “como mínimo”	$\geq$
“más de”, “mayor que”, “superior a”	$>$
“como mucho”, “a lo sumo”, “como máximo”	$\leq$
“menos de”, “menor que”, “inferior a”	$<$
“exactamente”, “igual a”, “es”	$=$
“distinto de”, “no es”, “diferente de”	$\neq$

3.1. Variables aleatorias discretas y continuas

En probabilidad, muchas veces no nos interesa únicamente describir los sucesos de un experimento aleatorio, sino asignar un valor numérico a cada resultado posible.

Definición 3.1 (Variable aleatoria). Una variable aleatoria es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Idea clave

Una variable aleatoria transforma los resultados de un experimento aleatorio en números. Esto permite estudiar el experimento usando herramientas matemáticas como funciones, sumas, integrales, esperanza y varianza.

Por ejemplo:

- Si lanzamos un dado, podemos definir X como el número obtenido.
- Si elegimos al azar un punto del intervalo $[0, 1]$, podemos definir X como el valor seleccionado.

A partir de aquí distinguiremos entre variables aleatorias **discretas** y variables aleatorias **continuas**.

La diferencia fundamental entre una variable discreta y una variable continua está en el tipo de valores que puede tomar.

Definición 3.2 (Variable aleatoria discreta). Una variable aleatoria es discreta si solo puede tomar un número finito o numerable de valores.

Definición 3.3 (Variable aleatoria continua). Una variable aleatoria es continua si puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo de la recta real.

Advertencia

En una variable discreta puede tener sentido calcular probabilidades como $P(X = 3)$. En cambio, en una variable continua normalmente se cumple:

$$P(X = a) = 0.$$

Por eso, en variables continuas se calculan probabilidades sobre intervalos, por ejemplo:

$$P(a \leq X \leq b).$$

3.1.1. Soporte de una variable aleatoria

El **soporte** de una variable aleatoria es el conjunto de valores que puede tomar con probabilidad no nula.

Definición 3.4 (Soporte). El soporte de una variable aleatoria X es el conjunto de valores en los que la variable puede tomar valores relevantes desde el punto de vista probabilístico. Es el dominio de definición de la función de probabilidad.

Ejemplo discreto: lanzamiento de un dado

Sea X la variable aleatoria que representa el resultado obtenido al lanzar un dado equilibrado. Por tanto, el soporte de X es:

$$S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ejemplo continuo: densidad $f(x) = 2x$

Consideramos ahora una variable aleatoria continua X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este caso, la variable solo toma valores en el intervalo $[0, 1]$. Por tanto, su soporte es:

$$S_X = [0, 1].$$

Idea clave

En el caso discreto, el soporte suele ser un conjunto de puntos. En el caso continuo, el soporte suele ser un intervalo, que puede ser cerrado o abierto.

3.1.2. Representación gráfica: discreto frente a continuo

La representación gráfica de una variable aleatoria depende de si la variable es discreta o continua.

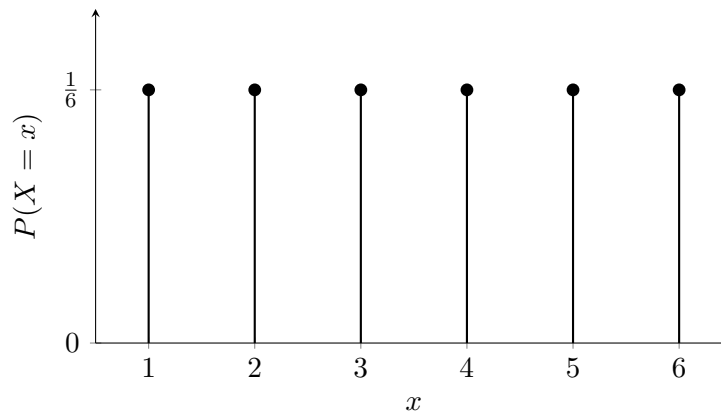
En una variable aleatoria discreta, la probabilidad se concentra en valores concretos. Por eso, su función de masa suele representarse mediante barras o puntos aislados.

En nuestro ejemplo del dado equilibrado, la variable aleatoria X puede tomar los valores

$$1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

y todos ellos tienen la misma probabilidad:

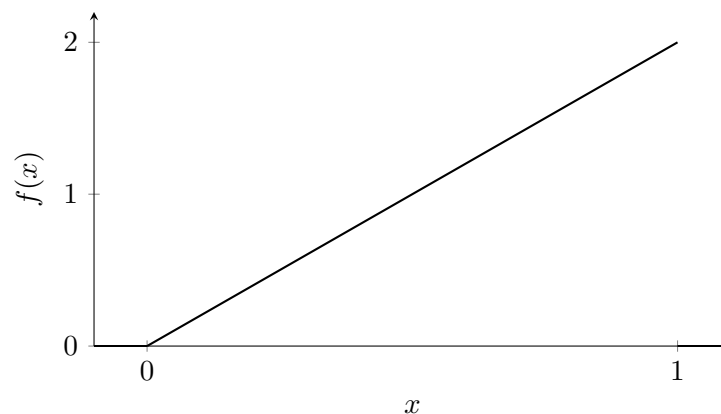
$$P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$



En una variable aleatoria continua, la probabilidad no se concentra en puntos aislados, sino que se reparte a lo largo de un intervalo. Por eso, su función de densidad se representa mediante una curva.

En nuestro ejemplo continuo, la densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Idea clave

En el caso discreto, la gráfica muestra probabilidades asignadas a puntos concretos. En el caso continuo, la gráfica muestra una densidad, y las probabilidades se obtienen como áreas bajo la curva.

3.2. Función de masa vs. función de densidad

Una vez distinguido el soporte de una variable aleatoria, el siguiente paso es describir cómo se reparte la probabilidad sobre dicho soporte.

En el caso discreto, la probabilidad se asigna directamente a cada valor posible. En el caso continuo, la probabilidad se reparte sobre intervalos mediante una función de densidad.

3.2.1. Función de masa, probabilidad o cuantía

Sea X una variable aleatoria discreta con soporte

$$S_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Definición 3.5 (Función de masa, probabilidad o cuantía). La función de masa, función de probabilidad o función de cuantía de una variable aleatoria discreta X es la función

$$p_X : S_X \longrightarrow [0, 1]$$

definida por

$$p_X(x_i) = P(X = x_i).$$

Es decir, a cada valor posible x_i de la variable le asigna la probabilidad de que X tome exactamente ese valor.

Propiedades de la función de masa

Para que una función p_X sea una función de masa debe cumplir:

$$p_X(x_i) \geq 0 \quad \text{para todo } x_i \in S_X,$$

y

$$\sum_{x_i \in S_X} p_X(x_i) = 1.$$

Ejemplo: lanzamiento de un dado

Sea X la variable aleatoria que representa el resultado obtenido al lanzar un dado equilibrado. Como el dado es equilibrado, todos los resultados tienen la misma probabilidad:

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Por tanto, su función de masa es:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprobamos sus propiedades.

En primer lugar,

$$p_X(x) \geq 0$$

para todo valor de x , ya que

$$\frac{1}{6} > 0.$$

En segundo lugar, la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$\sum_{x \in S_X} p_X(x) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) + p_X(4) + p_X(5) + p_X(6).$$

Sustituyendo:

$$\sum_{x \in S_X} p_X(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}.$$

$$\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

Por tanto, p_X es una función de masa válida.

3.2.2. Función de densidad de probabilidad

Sea X una variable aleatoria continua y sea S_X su soporte.

Definición 3.6 (Función de densidad). Una función $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función de densidad de una variable aleatoria continua X si puede escribirse como

$$f_X(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S_X, \\ 0, & x \notin S_X, \end{cases}$$

y permite calcular probabilidades mediante áreas bajo la curva.

En el caso continuo, la probabilidad no se asigna directamente a puntos concretos, sino a intervalos. Por eso, si $a < b$, se calcula como

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

Propiedades de la función de densidad

Para que una función f_X sea una función de densidad debe cumplir:

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in S_X,$$

y

$$\int_{S_X} f_X(x) dx = 1.$$

Equivalentemente, como $f_X(x) = 0$ fuera del soporte,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

Ejemplo: función recta creciente

En nuestro ejemplo continuo, la función de densidad era:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es obvio que es positiva para valores de x entre 0 y 1

$$f(x) \geq 0$$

y, por otra parte, la suma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 2x dx.$$

$$\int_0^1 2x \, dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Por tanto, $f(x) = 2x$ en $[0, 1]$ es una función de densidad correctamente definida.

Advertencia

En el caso continuo, la función de densidad puede tomar valores mayores que 1. Lo importante no es la altura de la densidad en un punto, sino que el área total bajo la curva sea 1.

3.3. Variables aleatorias mixtas

Hasta ahora hemos distinguido entre variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas. Sin embargo, también pueden aparecer variables que combinan ambos comportamientos.

Definición 3.7 (Variable aleatoria mixta). Una variable aleatoria X es mixta si su distribución tiene una parte discreta y una parte continua.

Es decir, existen ciertos puntos $a_1, a_2, \dots, a_m$ en los que la variable tiene probabilidad positiva, y además existe una función de densidad en uno o varios intervalos.

En una variable aleatoria mixta, la probabilidad total se reparte en dos partes:

$$\text{probabilidad discreta} + \text{probabilidad continua}.$$

De forma general, si X tiene masas puntuales $p_1, \dots, p_m$ en los puntos $a_1, \dots, a_m$ y densidad $f_X(x)$ en su parte continua, debe cumplirse:

$$\sum_{j=1}^m p_j + \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, dx = 1.$$

Idea clave

Una variable mixta tiene saltos de probabilidad en algunos puntos y, además, probabilidad repartida de forma continua en intervalos.

3.3.1. Propiedades de una ley mixta

Para que una ley mixta sea una ley de probabilidad válida debe cumplir:

$$p_j \geq 0 \quad \text{para todo punto de masa } a_j,$$

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x,$$

y

$$\sum_{j=1}^m p_j + \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, dx = 1.$$

Advertencia

En las variables mixtas hay que sumar las masas puntuales y, además, integrar la parte continua. Te recomiendo que compruebes, antes de nada, que cumple las propiedades, ya que puedes interpretarla erróneamente o incluso, estar mal definida.

Enfoque de examen

Pregunta 4. Convocatoria 2026, cuestionario extraordinario.

Sea una variable aleatoria mixta cuya ley de probabilidad viene dada por la siguiente expresión:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{8}, & x = 0, \\ \frac{1}{8}, & 0 < x < 1, \\ \frac{5}{8}, & x = 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \\ 0, & x = 2, \\ \frac{1}{8}, & 2 < x < 4, \\ 0, & x \geq 4. \end{cases}$$

Deduzca su función generatriz de momentos.

Fuente web: [INE, cuestionario 2026-v2/DEE-L, Pregunta 4.](#)

La ley dada es mixta porque tiene:

- masas puntuales en $x = 0$ y en $x = 1$;
- parte continua en los intervalos $(0, 1)$ y $(2, 4)$.

Las masas puntuales son:

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 1) = \frac{5}{8}.$$

La parte continua viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{8} \quad \text{si } 0 < x < 1,$$

y

$$f_X(x) = \frac{1}{8} \quad \text{si } 2 < x < 4.$$

Comprobación de la probabilidad total

Primero comprobamos si la expresión define una ley de probabilidad válida.

La parte discreta suma:

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8}.$$

La parte continua en $(0, 1)$ vale:

$$\int_0^1 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8}.$$

La parte continua en $(2, 4)$ vale:

$$\int_2^4 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8}(4 - 2) = \frac{2}{8}.$$

Por tanto, la masa total es:

$$\frac{6}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{9}{8}.$$

Advertencia

Con la expresión escrita tal como aparece, la masa total es

$$\frac{9}{8}$$

no 1. Por tanto, estrictamente hablando, no define una ley de probabilidad bien definida. En un examen conviene señalar esta comprobación.

Corrigimos este error con el siguiente enunciado, por ejemplo, reduciendo la probabilidad de $\frac{5}{8}$ a $\frac{4}{8}$. Y ya podemos comprobar que sí suma 1.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{8}, & x = 0, \\ \frac{1}{8}, & 0 < x < 1, \\ \frac{4}{8}, & x = 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \\ 0, & x = 2, \\ \frac{1}{8}, & 2 < x < 4, \\ 0, & x \geq 4. \end{cases}$$

3.4. Función de distribución

La función de distribución de una variable aleatoria X se define como:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Definición 3.8 (Función de distribución). La función de distribución de una variable aleatoria X es la función

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

definida por:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Observación. En inglés, la función de distribución se denomina *cumulative distribution function*, abreviadamente CDF. La palabra *cumulative* hace referencia a que la función va acumulando la probabilidad hasta el punto x .

3.4.1. Función de distribución en el caso discreto

En una variable discreta, la función de distribución se obtiene sumando las probabilidades de todos los valores menores o iguales que x :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i).$$

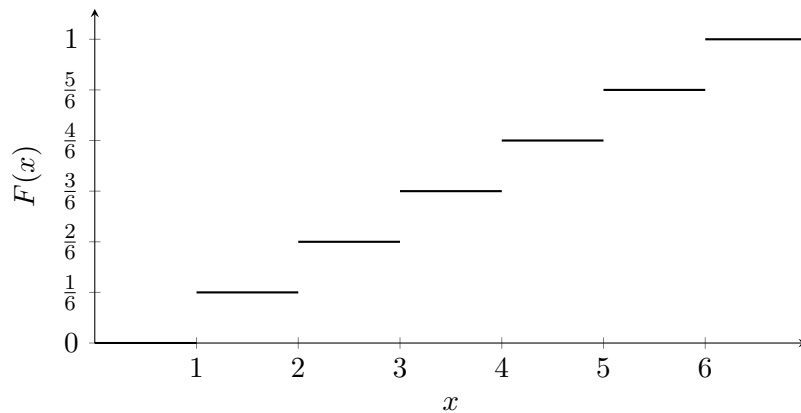
En el ejemplo del dado:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Como X solo puede tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, la función de distribución queda:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{6}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{2}{6}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{6}, & 3 \leq x < 4, \\ \frac{4}{6}, & 4 \leq x < 5, \\ \frac{5}{6}, & 5 \leq x < 6, \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$

Función de distribución de un dado



3.4.2. Función de distribución en el caso continuo

En una variable continua, la función de distribución se obtiene integrando la densidad desde $-\infty$ hasta x :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

En el ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x 2t \, dt, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

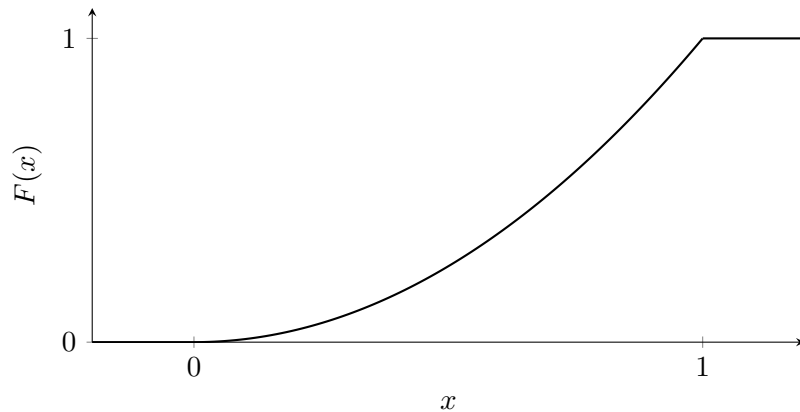
Calculamos la integral:

$$\int_0^x 2t \, dt = \left[t^2 \right]_0^x = x^2.$$

Por tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Función de distribución de $f(x) = 2x$ en $[0, 1]$



Idea clave

La función de distribución siempre acumula probabilidad desde la izquierda hasta el punto x . Por eso se define como

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

En el caso discreto tendrá saltos, mientras que en el caso continuo será una función continua.

Propiedades de la función de distribución

Sea X una variable aleatoria y sea F_X su función de distribución:

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Entonces F_X cumple las siguientes propiedades:

1. **Toma valores entre 0 y 1.**

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq F_X(x) \leq 1.$$

2. **Es no decreciente.**

Si $x_1 \leq x_2$, entonces

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$$

3. **Límite en $-\infty$.**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0.$$

4. **Límite en $+\infty$.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$$

5. **Continuidad por la derecha.**

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x).$$

Equivalentemente,

$$\lim_{y \downarrow x} F_X(y) = F_X(x).$$

Advertencia

Que una función sea no decreciente no significa que tenga que crecer estrictamente en todo punto. Puede permanecer constante en algunos intervalos.

Por ejemplo, si una variable aleatoria no puede tomar valores entre a y b , entonces la función de distribución será constante en ese intervalo.

3.5. Cálculo de probabilidades, esperanza y varianza

Una vez conocidas la función de masa o la función de densidad y la función de distribución, podemos calcular probabilidades, esperanza matemática y varianza.

Seguiremos usando los dos ejemplos anteriores:

- **Caso discreto:** lanzamiento de un dado equilibrado.
- **Caso continuo:** variable con densidad $f_X(x) = 2x$ en $[0, 1]$.

3.5.1. Cálculo de probabilidades

Caso discreto

En una variable aleatoria discreta, las probabilidades se calculan sumando las probabilidades de los valores del soporte que pertenecen al suceso considerado.

Si X es discreta con soporte S_X , entonces:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{\substack{x_i \in S_X \\ a \leq x_i \leq b}} p_X(x_i).$$

Ejemplo: lanzamiento de un dado

Sea X el resultado obtenido al lanzar un dado equilibrado. Entonces:

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Calculamos, por ejemplo,

$$P(X < 4).$$

Como los valores de X menores o iguales que 3 son 1, 2, 3, tenemos:

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Caso continuo

En una variable aleatoria continua, las probabilidades se calculan integrando la función de densidad en el intervalo correspondiente.

Si X es continua con densidad f_X , entonces:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

Equivalentemente, usando la función de distribución:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Idea clave

En el caso continuo, calcular una probabilidad consiste en calcular un área bajo la curva de densidad. Repasa el Teorema fundamental del Cálculo, el cálculo de integrales y la regla de Barrow, si esta sección te resulta más compleja que el caso discreto.

Advertencia

Si X es continua, entonces normalmente:

$$P(X = a) = 0.$$

Por eso,

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b).$$

En variables continuas, incluir o no incluir los extremos no cambia la probabilidad.

Ejemplo: densidad $f_X(x) = 2x$ en $[0, 1]$

Sea X una variable aleatoria continua con densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Calculamos, por ejemplo,

$$P(0, 2 \leq X \leq 0, 7).$$

Como ambos extremos pertenecen al soporte $[0, 1]$, tenemos:

$$P(0, 2 \leq X \leq 0, 7) = \int_{0,2}^{0,7} 2x \, dx.$$

Calculamos la integral:

$$\int_{0,2}^{0,7} 2x \, dx = \left[x^2 \right]_{0,2}^{0,7}.$$

Por tanto:

$$P(0, 2 \leq X \leq 0, 7) = 0,7^2 - 0,2^2 = 0,49 - 0,04 = 0,45.$$

También podemos calcularlo mediante la función de distribución. Como en este ejemplo

$$F_X(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

se tiene:

$$P(0, 2 \leq X \leq 0, 7) = F_X(0, 7) - F_X(0, 2).$$

$$P(0, 2 \leq X \leq 0, 7) = 0,7^2 - 0,2^2 = 0,45.$$

3.5.2. Esperanza matemática

La esperanza matemática mide el valor medio teórico de una variable aleatoria. Se interpreta como el valor alrededor del cual se centraría la variable si el experimento se repitiera muchas veces.

Caso discreto

Si X es una variable aleatoria discreta con soporte S_X , su esperanza matemática se define como:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i \in S_X} x_i p_X(x_i).$$

Es decir, se multiplica cada valor posible por su probabilidad y se suman todos los resultados.

Ejemplo: esperanza del dado

Sea X el resultado obtenido al lanzar un dado equilibrado. Entonces:

$$S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

y

$$p_X(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Por tanto:

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}.$$

Sacando factor común:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Por tanto, el valor esperado del lanzamiento de un dado equilibrado es:

$$\mathbb{E}(X) = 3,5.$$

Advertencia

La esperanza matemática no tiene por qué coincidir con uno de los valores posibles de la variable, pero sí debe encontrarse dentro del intervalo de su soporte. Aunque al lanzar un dado no puede salir 3,5, la esperanza sí puede valer 3,5. La esperanza representa un promedio teórico, no necesariamente un resultado posible.

Caso continuo

Si X es una variable aleatoria continua con densidad f_X , su esperanza matemática se define como:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Si la densidad solo es distinta de cero en el soporte S_X , entonces basta integrar en el soporte:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{S_X} x f_X(x) dx.$$

Ejemplo: esperanza de $f_X(x) = 2x$ en $[0, 1]$

Sea X una variable continua con densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Como el soporte es $[0, 1]$, calculamos:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx.$$

Calculamos:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Idea clave

La esperanza matemática puede interpretarse como el **centro de masas** de la distribución. En el ejemplo continuo, la densidad

$$f_X(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

forma un triángulo bajo la curva. Como la densidad crece hacia la derecha, hay más “masa de probabilidad” cerca de 1 que cerca de 0. Por eso la esperanza no queda en el punto medio del intervalo, que sería $\frac{1}{2}$, sino más desplazada hacia la derecha.

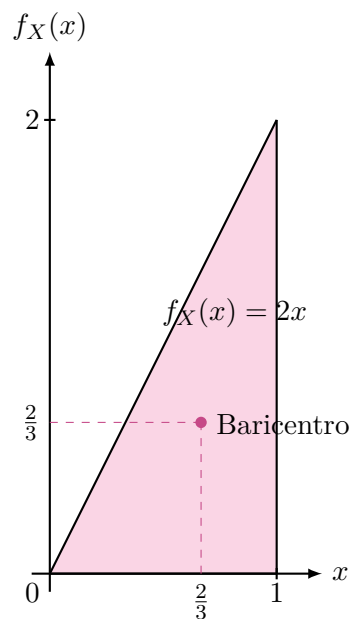
De hecho,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3}.$$

Este valor coincide con la coordenada horizontal del baricentro del triángulo delimitado por los puntos

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (1, 2).$$

Geométicamente, la esperanza indica dónde se equilibraría la figura si la región bajo la densidad fuese una lámina de masa uniforme.



3.5.3. Esperanza de una función de una variable aleatoria

A veces no queremos calcular la esperanza de X , sino la esperanza de una función de X , por ejemplo:

$$g(X) = X^2, \quad g(X) = 3X + 2, \quad g(X) = e^{tX}.$$

Caso discreto

Si X es discreta, entonces:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in S_X} g(x_i) p_X(x_i).$$

Caso continuo

Si X es continua, entonces:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x) dx.$$

O, si f_X solo es distinta de cero en S_X :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{S_X} g(x)f_X(x) dx.$$

Propiedades de la esperanza matemática

Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mathbb{E}(X)$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Esperanza de una constante.

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbb{E}(c) = c.$$

2. Linealidad respecto de constantes.

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

En particular,

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X).$$

3. Esperanza de una suma.

Si X e Y son variables aleatorias con esperanza, entonces

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Más generalmente,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i).$$

4. Monotonía.

Si $X \leq Y$, entonces

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

5. Producto de variables independientes.

Si X e Y son independientes, entonces

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Esta propiedad está relacionada con la covarianza, que aprenderás en temas más avanzados.

Ejemplo: esperanza de una función

Sea X una variable aleatoria continua con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Queremos calcular la esperanza de la función

$$g(X) = 3X + 2.$$

Es decir, queremos calcular

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[3X + 2].$$

Podemos hacerlo de dos formas.

Primera forma: usando propiedades de la esperanza

Usamos la linealidad de la esperanza:

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

En este caso,

$$\mathbb{E}(3X + 2) = 3\mathbb{E}(X) + 2.$$

Como ya habíamos calculado que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3},$$

entonces

$$\mathbb{E}(3X + 2) = 3 \cdot \frac{2}{3} + 2.$$

$$\mathbb{E}(3X + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Segunda forma: usando integrales

También podemos calcularlo directamente a partir de la definición de esperanza de una función.

Como X es continua,

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x) dx.$$

Como la densidad solo es distinta de cero en $[0, 1]$, basta integrar en ese intervalo:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 g(x)f_X(x) dx.$$

Sustituyendo

$$g(x) = 3x + 2$$

y

$$f_X(x) = 2x,$$

obtenemos:

$$\mathbb{E}(3X + 2) = \int_0^1 (3x + 2) 2x \, dx.$$

Desarrollamos el producto:

$$(3x + 2) 2x = 6x^2 + 4x.$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}(3X + 2) = \int_0^1 (6x^2 + 4x) \, dx.$$

Calculamos la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (6x^2 + 4x) \, dx &= \left[2x^3 + 2x^2 \right]_0^1. \\ \left[2x^3 + 2x^2 \right]_0^1 &= (2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2) - (2 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2). \\ &= 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}(3X + 2) = 4.$$

Idea clave

Las dos formas dan el mismo resultado.

Usando propiedades:

$$\mathbb{E}(3X + 2) = 3\mathbb{E}(X) + 2 = 4.$$

Usando integrales:

$$\mathbb{E}(3X + 2) = \int_0^1 (3x + 2) 2x \, dx = 4.$$

La primera forma suele ser más rápida, pero la segunda muestra de dónde sale el resultado a partir de la definición.

3.5.4. Varianza

La varianza mide la dispersión de una variable aleatoria alrededor de su esperanza. Cuanto mayor es la varianza, más dispersos suelen estar los valores de la variable respecto a su media.

Definición 3.9 (Varianza). Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mathbb{E}(X)$. La varianza de X se define como:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}(X))^2 \right].$$

Una fórmula equivalente, y normalmente más cómoda para calcular, es:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Idea clave

La varianza es una media de distancias cuadráticas respecto de la esperanza. Por eso nunca puede ser negativa.

3.5.5. Propiedades de la varianza

Sea X una variable aleatoria con varianza $\text{Var}(X)$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. **La varianza es siempre no negativa.**

$$\text{Var}(X) \geq 0.$$

2. **La varianza de una constante es cero.**

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\text{Var}(c) = 0.$$

3. **La varianza no cambia al sumar una constante.**

$$\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X).$$

4. **La varianza se multiplica por el cuadrado de la constante.**

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X).$$

5. **Transformación lineal.**

Combinando las dos propiedades anteriores,

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

6. **Varianza de una suma.**

En general,

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

7. **Varianza de una suma de variables independientes.**

Si X e Y son independientes, entonces

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Más generalmente, si $X_1, \dots, X_n$ son independientes,

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

Idea clave

Sumar una constante desplaza la variable, pero no cambia su dispersión. En cambio, multiplicar por una constante sí cambia la escala de la variable, y por eso la varianza se multiplica por el cuadrado de esa constante.

Caso discreto

Si X es discreta, entonces:

$$\text{Var}(X) = \sum_{x_i \in S_X} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_X(x_i).$$

También puede calcularse mediante:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2,$$

donde

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x_i \in S_X} x_i^2 p_X(x_i).$$

Ejemplo: varianza del dado

Ya hemos calculado que, para el dado equilibrado,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}.$$

Calculamos ahora:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^6 x^2 P(X = x).$$

Como $P(X = x) = \frac{1}{6}$ para todo $x = 1, \dots, 6$:

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{91}{6}.$$

Por tanto:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4}.$$

Pasamos a común denominador:

$$\text{Var}(X) = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}.$$

Por tanto:

$$\text{Var}(X) = \frac{35}{12}.$$

Caso continuo

Si X es continua con densidad f_X , entonces:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) dx.$$

También puede calcularse mediante:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2,$$

donde

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx.$$

Si f_X solo es distinta de cero en S_X , entonces:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{S_X} x^2 f_X(x) dx.$$

Ejemplo: varianza de $f_X(x) = 2x$ en $[0, 1]$

Ya hemos calculado que:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3}.$$

Calculamos ahora:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx.$$

Sustituyendo la densidad:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 2x^3 dx.$$

Calculamos:

$$\int_0^1 2x^3 dx = \left[\frac{x^4}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Por tanto:

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}.$$

Ahora aplicamos la fórmula de la varianza:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} \right)^2.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9}.$$

Pasamos a común denominador:

$$\text{Var}(X) = \frac{9}{18} - \frac{8}{18} = \frac{1}{18}.$$

Por tanto:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{18}.$$

3.5.6. Desviación típica

La desviación típica, también llamada desviación estándar, es la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Idea clave

La varianza mide la dispersión en unidades cuadradas. La desviación típica vuelve a estar en las mismas unidades que la variable original.

Ejemplo discreto

Para el dado equilibrado:

$$\text{Var}(X) = \frac{35}{12}.$$

Por tanto:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{35}{12}}.$$

Ejemplo continuo

Para la variable continua con densidad $f_X(x) = 2x$ en $[0, 1]$:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{18}.$$

Por tanto:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Propiedades de la desviación típica

Sea X una variable aleatoria con desviación típica σ_X . Entonces:

1. **Es siempre no negativa.**

$$\sigma_X \geq 0.$$

2. Es la raíz cuadrada de la varianza.

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

3. No cambia al sumar una constante.

Si $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sigma_{X+b} = \sigma_X.$$

4. Se multiplica por el valor absoluto de la constante.

Si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sigma_{aX} = |a|\sigma_X.$$

En consecuencia,

$$\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X.$$

Idea clave

La desviación típica mide la dispersión en las mismas unidades que la variable. Por eso, si multiplicamos la variable por a , la desviación típica se multiplica por $|a|$, no por a^2 . En cambio, la varianza se mide en unidades al cuadrado.

3.6. Momentos de una variable aleatoria

Antes de estudiar la función generatriz de momentos, conviene entender qué es un momento.

De forma intuitiva, un momento es una cantidad que resume algún aspecto de la distribución de una variable aleatoria. Por ejemplo, la esperanza resume su centro, la varianza resume su dispersión y otros momentos permiten estudiar características más finas de la distribución.

3.6.1. Momento ordinario o momento respecto del origen

Sea X una variable aleatoria. El momento ordinario de orden r , también llamado momento respecto del origen de orden r , se define como:

$$\alpha_r = \mathbb{E}(X^r),$$

siempre que dicha esperanza exista.

Caso discreto

Si X es una variable aleatoria discreta con soporte S_X , entonces:

$$\alpha_r = \mathbb{E}(X^r) = \sum_{x_i \in S_X} x_i^r p_X(x_i).$$

Caso continuo

Si X es una variable aleatoria continua con densidad f_X , entonces:

$$\alpha_r = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx.$$

Si la densidad solo es distinta de cero en el soporte S_X , entonces:

$$\alpha_r = \int_{S_X} x^r f_X(x) dx.$$

3.6.2. Momento central

El momento central de orden r mide potencias de las desviaciones de la variable respecto de su esperanza.

Sea

$$\alpha = \mathbb{E}(X).$$

El momento central de orden r se define como:

$$\beta_r = \mathbb{E}[(X - \alpha)^r],$$

siempre que dicha esperanza exista.

Caso discreto

Si X es discreta, entonces:

$$\beta_r = \sum_{x_i \in S_X} (x_i - \alpha)^r p_X(x_i).$$

Caso continuo

Si X es continua, entonces:

$$\beta_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha)^r f_X(x) dx.$$

O, si la densidad solo es distinta de cero en S_X ,

$$\beta_r = \int_{S_X} (x - \alpha)^r f_X(x) dx.$$

Idea clave

El segundo momento central es la varianza:

$$\beta_2 = \mathbb{E}[(X - \alpha)^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \text{Var}(X).$$

Resumen

La notación de los momentos es una generalización de los momentos más importantes: la esperanza y la varianza.

Los momentos que estamos definiendo aquí son **momentos poblacionales** o **momentos teóricos**, porque se calculan a partir de la distribución de la variable aleatoria.

En estadística descriptiva, aparecen los **momentos muestrales**, que se calculan a partir de los datos observados de una muestra.

La idea es parecida, pero no igual: en lugar de usar esperanzas teóricas, se usarán sumas sobre los datos de la muestra.

Además, en inferencia estadística se estudiará un procedimiento llamado **método de los momentos**, que consiste, de forma intuitiva, en comparar momentos poblacionales con momentos muestrales para estimar parámetros desconocidos.

Momentos respecto del origen de orden 3 y 4

Sea X una variable aleatoria continua con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Queremos calcular los momentos respecto del origen de orden 3 y 4.

Recordemos que el momento respecto del origen de orden r para una variable continua se define como

$$\alpha_r = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx.$$

Ya que la densidad solo es distinta de cero en $[0, 1]$, basta integrar en este intervalo:

$$\alpha_r = \int_0^1 x^r f_X(x) dx.$$

$$\alpha_3 = \mathbb{E}(X^3) = \int_0^1 x^3 f_X(x) dx.$$

Sustituyendo la densidad $f_X(x) = 2x$:

$$\alpha_3 = \int_0^1 x^3 \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^4 dx.$$

Calculamos:

$$\alpha_3 = \left[\frac{2x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Por tanto,

$$\alpha_3 = \mathbb{E}(X^3) = \frac{2}{5}.$$

Y, por otra parte, el momento respecto del origen de orden 4 es:

$$\alpha_4 = \mathbb{E}(X^4) = \int_0^1 x^4 f_X(x) dx.$$

Sustituyendo la densidad $f_X(x) = 2x$:

$$\alpha_4 = \int_0^1 x^4 \cdot 2x \, dx = \int_0^1 2x^5 \, dx.$$

Calculamos:

$$\alpha_4 = \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Por tanto,

$$\alpha_4 = \mathbb{E}(X^4) = \frac{1}{6}.$$

3.7. Función generadora o generatriz de momentos

¿Sabías que...?

La palabra **momento** no aparece por casualidad: procede de una analogía con la física. En física, los momentos ayudan a estudiar cómo se distribuye una masa alrededor de un punto. En probabilidad ocurre algo parecido: los momentos describen cómo se distribuye la “masa de probabilidad” de una variable aleatoria. Por eso la esperanza puede interpretarse como un **centro de masas** de la distribución, y la varianza como una medida de cuánto se dispersa esa masa alrededor de dicho centro.

3.8. Función generatriz de momentos

Una vez definidos los momentos de una variable aleatoria, podemos estudiar una herramienta que permite obtenerlos de forma sistemática: la **función generatriz de momentos**.

La función generatriz de momentos recibe este nombre porque, cuando existe, permite generar los momentos de una variable aleatoria mediante derivadas.

3.8.1. Definición

Sea X una variable aleatoria. La función generatriz de momentos de X , si existe en un entorno de 0, se define como

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Es decir, se calcula la esperanza de la función exponencial e^{tX} .

Advertencia

No todas las variables aleatorias tienen función generatriz de momentos. Para que exista, la esperanza

$$\mathbb{E}(e^{tX})$$

debe estar definida al menos para valores de t en un entorno de 0.

No tienen función generatriz la distribución de Cauchy, la distribución t de Student, la distribución de Pareto ni la Distribución Log-normal.

3.8.2. Caso discreto

Si X es una variable aleatoria discreta con soporte S_X , entonces

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x_i \in S_X} e^{tx_i} p_X(x_i).$$

Es decir, se sustituye cada valor posible x_i en e^{tx} , se multiplica por su probabilidad y se suman todos los términos.

3.8.3. Caso continuo

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f_X , entonces

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx.$$

Si la densidad solo es distinta de cero en el soporte S_X , entonces basta integrar en dicho soporte:

$$M_X(t) = \int_{S_X} e^{tx} f_X(x) dx.$$

3.8.4. Caso mixto

Si X es una variable aleatoria mixta, su función generatriz de momentos se calcula sumando la parte discreta y la parte continua.

Supongamos que X tiene masas puntuales en los valores $a_1, a_2, \dots, a_m$, con probabilidades

$$P(X = a_j) = p_j,$$

y además tiene una parte continua con densidad $f_X(x)$. Entonces

$$M_X(t) = \sum_{j=1}^m p_j e^{ta_j} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx.$$

Idea clave

En una variable mixta, la función generatriz de momentos se calcula igual que cualquier esperanza: sumando la contribución de las masas puntuales e integrando la parte continua.

3.8.5. Relación entre la función generatriz y los momentos

La utilidad principal de la función generatriz de momentos es que sus derivadas en $t = 0$ permiten obtener los momentos respecto del origen.

Si

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}),$$

entonces:

$$M'_X(0) = \mathbb{E}(X) = \alpha_1,$$

$$M''_X(0) = \mathbb{E}(X^2) = \alpha_2,$$

y, en general,

$$M_X^{(r)}(0) = \mathbb{E}(X^r) = \alpha_r.$$

Idea clave

La función generatriz de momentos permite obtener los momentos respecto del origen derivando y evaluando en $t = 0$:

$$M_X^{(r)}(0) = \alpha_r.$$

3.8.6. Propiedades de la función generatriz de momentos

Sea X una variable aleatoria con función generatriz de momentos $M_X(t)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Valor en cero.

$$M_X(0) = 1.$$

En efecto,

$$M_X(0) = \mathbb{E}(e^{0X}) = \mathbb{E}(1) = 1.$$

2. Obtención de momentos.

Si la función generatriz existe en un entorno de 0, entonces

$$M_X^{(r)}(0) = \mathbb{E}(X^r).$$

3. Transformación lineal.

Si

$$Y = aX + b,$$

entonces

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at).$$

4. Suma de variables independientes.

Si X e Y son independientes, entonces

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t).$$

5. Unicidad.

Si dos variables aleatorias tienen la misma función generatriz de momentos en un entorno de 0, entonces tienen la misma distribución.

3.8.7. Ejemplo: variable aleatoria mixta

En el cuestionario extraordinario de 2026 del Cuerpo de Diplomados en Estadística del Estado se planteó una variable aleatoria mixta y se pidió deducir su función generatriz de momentos.

En estos apuntes usamos una versión corregida de la ley para que la probabilidad total sea igual a 1.

Enfoque de examen

Pregunta 4. Convocatoria 2026, cuestionario extraordinario. Versión corregida. Sea una variable aleatoria mixta cuya ley de probabilidad viene dada por la siguiente expresión:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{8}, & x = 0, \\ \frac{1}{8}, & 0 < x < 1, \\ \frac{4}{8}, & x = 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \\ 0, & x = 2, \\ \frac{1}{8}, & 2 < x < 4, \\ 0, & x \geq 4. \end{cases}$$

Deduzca su función generatriz de momentos.

Fuente web: [INE, cuestionario 2026-v2/DEE-L, Pregunta 4.](#)

Comprobación de que es una ley de probabilidad

Antes de calcular la función generatriz de momentos, comprobamos que la ley está correctamente normalizada.

La parte discreta está formada por las masas puntuales en $x = 0$ y en $x = 1$:

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 1) = \frac{4}{8}.$$

La parte continua está en los intervalos $(0, 1)$ y $(2, 4)$.

Por tanto, la probabilidad total es

$$\frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \int_0^1 \frac{1}{8} dx + \int_2^4 \frac{1}{8} dx.$$

Calculamos las integrales:

$$\int_0^1 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8},$$

y

$$\int_2^4 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8}(4 - 2) = \frac{2}{8}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

Así, la expresión corregida define una ley de probabilidad válida.

Cálculo de la función generatriz de momentos

Por definición,

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Como la variable es mixta, sumamos la parte discreta y la parte continua:

$$M_X(t) = \frac{1}{8}e^{0t} + \frac{4}{8}e^t + \int_0^1 e^{tx} \frac{1}{8} dx + \int_2^4 e^{tx} \frac{1}{8} dx.$$

Como $e^{0t} = 1$, queda

$$M_X(t) = \frac{1}{8} + \frac{4}{8}e^t + \frac{1}{8} \int_0^1 e^{tx} dx + \frac{1}{8} \int_2^4 e^{tx} dx.$$

Para $t \neq 0$,

$$\int_0^1 e^{tx} dx = \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_0^1 = \frac{e^t - 1}{t},$$

y

$$\int_2^4 e^{tx} dx = \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_2^4 = \frac{e^{4t} - e^{2t}}{t}.$$

Por tanto, para $t \neq 0$,

$$M_X(t) = \frac{1}{8} + \frac{4}{8}e^t + \frac{e^t - 1}{8t} + \frac{e^{4t} - e^{2t}}{8t}.$$

Es decir,

$$M_X(t) = \frac{1 + 4e^t}{8} + \frac{e^t - 1 + e^{4t} - e^{2t}}{8t}, \quad t \neq 0.$$

Además, por la propiedad general de toda función generatriz de momentos,

$$M_X(0) = 1.$$

Resumen

La función generatriz de momentos de la variable mixta corregida es

$$M_X(t) = \frac{1 + 4e^t}{8} + \frac{e^t - 1 + e^{4t} - e^{2t}}{8t}, \quad t \neq 0,$$

con

$$M_X(0) = 1.$$

3.9. Función característica

La función característica también permite estudiar la distribución de una variable aleatoria y obtener sus momentos, pero tiene una ventaja importante: **existe siempre**, para cualquier variable aleatoria.

La función característica cumple un papel parecido al de la función generatriz de momentos, pero usando números complejos. Por eso es una herramienta más general.

3.9.1. Recordatorio: la unidad imaginaria

La función característica utiliza la unidad imaginaria, que se denota por i .

$$i = \sqrt{-1}.$$

Por tanto,

$$i^2 = -1.$$

Las potencias de i se repiten de forma cíclica:

$$i^1 = i,$$

$$i^2 = -1,$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i,$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1.$$

A partir de ahí, el ciclo vuelve a empezar:

$$i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1.$$

Advertencia

En esta sección solo necesitamos saber manipular de forma básica la unidad imaginaria i . Los números complejos se explicarán con más detalle en una clase aparte.

3.9.2. Definición

Sea X una variable aleatoria. La función característica de X se define como

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}),$$

donde i es la unidad imaginaria y $t \in \mathbb{R}$.

Idea clave

La función característica se parece mucho a la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}),$$

pero en la función característica aparece it en lugar de t :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

3.9.3. Caso discreto

Si X es una variable aleatoria discreta con soporte S_X , entonces

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{x_j \in S_X} e^{itx_j} p_X(x_j).$$

Es decir, se sustituye cada valor posible x_j en e^{itx} , se multiplica por su probabilidad y se suman todos los términos.

3.9.4. Caso continuo

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f_X , entonces

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx.$$

Si la densidad solo es distinta de cero en el soporte S_X , entonces basta integrar en dicho soporte:

$$\varphi_X(t) = \int_{S_X} e^{itx} f_X(x) dx.$$

3.9.5. Caso mixto

Si X es una variable aleatoria mixta, su función característica se calcula sumando la parte discreta y la parte continua.

Supongamos que X tiene masas puntuales en los valores $a_1, a_2, \dots, a_m$, con probabilidades

$$P(X = a_j) = p_j,$$

y además tiene una parte continua con densidad $f_X(x)$. Entonces

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^m p_j e^{ita_j} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx.$$

3.9.6. Relación entre la función característica y los momentos

La función característica también permite obtener los momentos de una variable aleatoria, cuando dichos momentos existen.

Si

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}),$$

entonces:

$$\varphi_X'(0) = i\mathbb{E}(X),$$

$$\varphi_X''(0) = i^2\mathbb{E}(X^2) = -\mathbb{E}(X^2),$$

y, en general,

$$\varphi_X^{(r)}(0) = i^r \mathbb{E}(X^r).$$

Por tanto, si usamos la notación

$$\alpha_r = \mathbb{E}(X^r),$$

entonces

$$\varphi_X^{(r)}(0) = i^r \alpha_r.$$

Equivalentemente,

$$\alpha_r = \frac{\varphi_X^{(r)}(0)}{i^r}.$$

Idea clave

La función característica también permite obtener los momentos respecto del origen derivando y evaluando en $t = 0$, pero aparece el factor i^r :

$$\varphi_X^{(r)}(0) = i^r \alpha_r.$$

3.9.7. Propiedades de la función característica

Sea X una variable aleatoria con función característica $\varphi_X(t)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Existe siempre.

A diferencia de la función generatriz de momentos, la función característica existe para toda variable aleatoria.

2. Valor en cero.

$$\varphi_X(0) = 1.$$

En efecto,

$$\varphi_X(0) = \mathbb{E}(e^{i0X}) = \mathbb{E}(1) = 1.$$

3. Módulo acotado por 1.

Para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi_X(t)| \leq 1.$$

4. Obtención de momentos.

Si existe el momento de orden r , entonces

$$\varphi_X^{(r)}(0) = i^r \mathbb{E}(X^r).$$

5. Transformación lineal.

Si

$$Y = aX + b,$$

entonces

$$\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at).$$

6. Suma de variables independientes.

Si X e Y son independientes, entonces

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

7. Unicidad.

Si dos variables aleatorias tienen la misma función característica, entonces tienen la misma distribución.

3.9.8. Comparación con la función generatriz de momentos

La función generatriz de momentos y la función característica son herramientas parecidas, pero no son exactamente iguales.

Función generatriz de momentos	Función característica
$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$	$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$
Puede no existir	Existe siempre
Usa números reales	Usa números complejos
Permite obtener momentos si existe alrededor de 0	Permite obtener momentos cuando existen

3.9.9. Ejemplo: función característica del dado equilibrado

Sea X la variable aleatoria que representa el resultado obtenido al lanzar un dado equilibrado. Entonces

$$S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

y

$$P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Queremos calcular su función característica:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Como X es discreta, usamos la fórmula

$$\varphi_X(t) = \sum_{x \in S_X} e^{itx} P(X = x).$$

Sustituyendo los valores posibles de X :

$$\varphi_X(t) = e^{it}\frac{1}{6} + e^{2it}\frac{1}{6} + e^{3it}\frac{1}{6} + e^{4it}\frac{1}{6} + e^{5it}\frac{1}{6} + e^{6it}\frac{1}{6}.$$

Sacando factor común:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{6} (e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it}).$$

Por tanto,

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 e^{itx}.$$

Aplicación: obtención del primer momento

Recordemos que, si existe el primer momento, se cumple:

$$\varphi'_X(0) = i\mathbb{E}(X).$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i}.$$

Derivamos la función característica:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{6} \left(e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it} \right).$$

Como

$$\frac{d}{dt} e^{itx} = ix e^{itx},$$

tenemos:

$$\varphi'_X(t) = \frac{1}{6} \left(ie^{it} + 2ie^{2it} + 3ie^{3it} + 4ie^{4it} + 5ie^{5it} + 6ie^{6it} \right).$$

Evalúamos en $t = 0$:

$$\varphi'_X(0) = \frac{1}{6} (i + 2i + 3i + 4i + 5i + 6i).$$

Sacamos factor común i :

$$\varphi'_X(0) = \frac{i}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6).$$

queda:

$$\varphi'_X(0) = \frac{21i}{6} = \frac{7i}{2}.$$

Ahora usamos la relación

$$\varphi'_X(0) = i\mathbb{E}(X).$$

Entonces:

$$i\mathbb{E}(X) = \frac{7i}{2}.$$

Sumplificando i :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}.$$

Por tanto, el primer momento respecto del origen es:

$$\alpha_1 = \mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}.$$

3.10. Distribuciones conocidas de probabilidad discretas

Se analizarán las principales distribuciones discretas, manteniendo siempre una misma estructura:

- cuándo se utilizan;
- parámetros;
- dominio o soporte;
- función de masa o densidad;
- función de distribución;
- esperanza;
- varianza;
- cálculo de probabilidades;
- función generatriz de momentos;
- función característica;
- ejemplos.

3.10.1. Distribución de Bernoulli

La distribución de Bernoulli modeliza un experimento aleatorio con solo dos resultados posibles: éxito o fracaso.

Se utiliza cuando realizamos un único ensayo y solo nos interesa si ocurre o no ocurre un determinado suceso.

Parámetro

La distribución de Bernoulli depende de un único parámetro:

$$p \in [0, 1],$$

donde

$$p = P(\text{éxito}).$$

Habitualmente se escribe

$$q = 1 - p,$$

donde q representa la probabilidad de fracaso.

Notación

Si X sigue una distribución de Bernoulli de parámetro p , escribimos:

$$X \sim \text{Ber}(p).$$

Dominio o soporte

La variable aleatoria toma dos valores:

$$S_X = \{0, 1\}.$$

Normalmente se interpreta como:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si ocurre el éxito,} \\ 0, & \text{si ocurre el fracaso.} \end{cases}$$

Función de masa

La función de masa es:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

Equivalentemente:

$$P(X = x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0, \\ p, & x = 1. \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

En este caso:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = p.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = p(1 - p) = pq.$$

Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Como X es discreta:

$$M_X(t) = e^{t \cdot 0} P(X = 0) + e^{t \cdot 1} P(X = 1).$$

Por tanto:

$$M_X(t) = (1 - p) + pe^t.$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Por tanto:

$$\varphi_X(t) = (1 - p) + pe^{it}.$$

Ejemplo

Sea X la variable que indica si una persona aprueba un examen, tomando el valor 1 si aprueba y 0 si no aprueba. Si la probabilidad de aprobar es 0,7, entonces:

$$X \sim \text{Bernoulli}(0,7).$$

Así:

$$P(X = 1) = 0,7, \quad P(X = 0) = 0,3.$$

La esperanza es:

$$\mathbb{E}(X) = 0,7.$$

Idea clave

Una Bernoulli es la distribución básica de éxito o fracaso. Muchas distribuciones discretas se construyen a partir de repeticiones de ensayos de Bernoulli.

3.10.2. Distribución binomial

La distribución binomial modeliza el número de éxitos obtenidos al repetir varias veces un experimento de Bernoulli en las mismas condiciones.

Se utiliza cuando:

- se realizan n ensayos;
- cada ensayo tiene dos resultados posibles: éxito o fracaso;
- la probabilidad de éxito es constante e igual a p ;
- los ensayos son independientes.

Parámetros

La distribución binomial depende de dos parámetros:

$$n \in \mathbb{N}, \quad p \in [0, 1].$$

Donde:

- n es el número de ensayos;
- p es la probabilidad de éxito en cada ensayo.

Notación

Si X sigue una distribución binomial de parámetros n y p , escribimos:

$$X \sim \text{Bin}(n, p).$$

Dominio o soporte

La variable X cuenta el número de éxitos en n ensayos, por tanto:

$$S_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Función de masa

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Idea clave

El término $\binom{n}{k}$ es un número combinatorio, que cuenta de cuántas formas pueden colocarse los k éxitos entre los n ensayos. Aprende a calcularlo con ayuda de la calculadora científica.

Función de distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Como X es discreta:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

para $0 \leq x < n$. Además:

$$F_X(x) = 0 \quad \text{si } x < 0,$$

y

$$F_X(x) = 1 \quad \text{si } x \geq n.$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = npq.$$

Función generatriz de momentos

La función generatriz de momentos de una binomial se obtiene usando que una binomial es suma de n variables de Bernoulli independientes.

Si

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

donde

$$X_i \sim \text{Ber}(p), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

entonces

$$X \sim \text{Bin}(n, p).$$

Como la función generatriz de momentos de una Bernoulli es

$$M_{X_i}(t) = 1 - p + pe^t,$$

y las variables $X_1, \dots, X_n$ son independientes, la función generatriz de la suma es el producto de n veces su función generatriz:

$$M_X(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

Por tanto,

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n.$$

Función característica

La función característica es:

$$\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n.$$

Ejemplo

Un examen tipo test tiene 10 preguntas. Supongamos que un alumno responde al azar y que la probabilidad de acertar cada pregunta es 0,25. Si X es el número de respuestas correctas, entonces:

$$X \sim B(10, 0,25).$$

La probabilidad de acertar exactamente 3 preguntas es:

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} (0,25)^3 (0,75)^7.$$

La esperanza es:

$$\mathbb{E}(X) = np = 10 \cdot 0,25 = 2,5.$$

La varianza es:

$$\text{Var}(X) = np(1 - p) = 10 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 1,875.$$

Advertencia

La binomial requiere independencia y probabilidad de éxito constante. Si la probabilidad cambia de un ensayo a otro, o si los ensayos no son independientes, no podemos aplicar directamente una binomial.

3.10.3. Distribución hipergeométrica

La distribución hipergeométrica modeliza el número de éxitos obtenidos al extraer elementos de una población finita sin reemplazamiento.

Se utiliza cuando:

- hay una población finita de tamaño N ;
- dentro de la población hay K elementos considerados éxitos;
- se extrae una muestra de tamaño n ;
- las extracciones se realizan sin reemplazamiento.

Parámetros

La distribución hipergeométrica depende de tres parámetros:

$$N, \quad K, \quad n.$$

Donde:

- N es el tamaño total de la población;
- K es el número de éxitos en la población;
- n es el tamaño de la muestra extraída.

Notación

Si X sigue una distribución hipergeométrica, escribimos:

$$X \sim HG(N, K, n).$$

Dominio o soporte

La variable X cuenta el número de éxitos en la muestra. Su soporte es:

$$S_X = \{\max(0, n - (N - K)), \dots, \min(n, K)\}.$$

Idea clave

El soporte de la hipergeométrica depende de las restricciones de la población: no podemos obtener más éxitos de los que hay en la población, ni más éxitos que elementos extraídos.

Función de masa

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Donde:

- $\binom{K}{k}$ elige los k éxitos;
- $\binom{N-K}{n-k}$ elige los fracasos restantes;
- $\binom{N}{n}$ cuenta todas las muestras posibles de tamaño n .

Función de distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Por tanto:

$$F_X(x) = \sum_{k=\max(0, n-(N-K))}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = n \frac{K}{N}.$$

Si llamamos

$$p = \frac{K}{N},$$

entonces:

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}.$$

Usando $p = K/N$:

$$\text{Var}(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}.$$

El factor

$$\frac{N-n}{N-1}$$

se llama **factor de corrección por población finita** y será relevante cuando estudies muestreo o teoría de muestras.

Cálculo de probabilidades

Para calcular la probabilidad de obtener exactamente k éxitos:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Para calcular probabilidades acumuladas:

$$P(X \leq k) = \sum_j \frac{\binom{K}{j} \binom{N-K}{n-j}}{\binom{N}{n}},$$

sumando solo los valores j admisibles del soporte.

Función generatriz de momentos

No tiene una expresión elemental tan simple como la binomial. Se escribe como suma finita:

$$M_X(t) = \sum_{k \in S_X} e^{tk} \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = \sum_{k \in S_X} e^{itk} \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ejemplo

En una urna hay 20 bolas, de las cuales 6 son rojas. Se extraen 5 bolas sin reemplazamiento. Sea X el número de bolas rojas extraídas.

Entonces:

$$X \sim HG(20, 6, 5).$$

La probabilidad de obtener exactamente 2 bolas rojas es:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{6}{2} \binom{14}{3}}{\binom{20}{5}}.$$

La esperanza es:

$$\mathbb{E}(X) = 5 \cdot \frac{6}{20} = 1,5.$$

Advertencia

La diferencia fundamental entre binomial e hipergeométrica es el reemplazamiento:

- con reemplazamiento o ensayos independientes: binomial;
- sin reemplazamiento en población finita: hipergeométrica.

3.10.4. Distribución geométrica

La distribución geométrica modeliza el número de ensayos necesarios hasta obtener el primer éxito.

Se utiliza cuando:

- se repiten ensayos de Bernoulli independientes;
- la probabilidad de éxito en cada ensayo es constante e igual a p ;
- se observa en qué ensayo aparece el primer éxito.

Parámetro

La distribución geométrica depende de un parámetro:

$$p \in (0, 1],$$

donde p es la probabilidad de éxito en cada ensayo.

Escribimos:

$$q = 1 - p.$$

Notación

Si X sigue una distribución geométrica de parámetro p , escribimos:

$$X \sim Geo(p).$$

Dominio o soporte

En estos apuntes tomamos X como el número de ensayo en el que aparece el primer éxito. Por tanto:

$$S_X = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Función de masa

Para que el primer éxito ocurra en el ensayo k , deben ocurrir:

- $k - 1$ fracasos antes;
- un éxito en el ensayo k .

Por tanto:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Es decir:

$$P(X = k) = q^{k-1}p.$$

Función de distribución

$$F_X(k) = P(X \leq k).$$

Para $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$F_X(k) = 1 - P(X > k).$$

El suceso $X > k$ significa que no ha habido ningún éxito en los primeros k ensayos. Por tanto:

$$P(X > k) = q^k.$$

Así:

$$F_X(k) = 1 - q^k.$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Cálculo de probabilidades

La probabilidad de que el primer éxito ocurra exactamente en el ensayo k es:

$$P(X = k) = q^{k-1}p.$$

La probabilidad de que el primer éxito ocurra como mucho en el ensayo k es:

$$P(X \leq k) = 1 - q^k.$$

La probabilidad de que el primer éxito tarde más de k ensayos es:

$$P(X > k) = q^k.$$

Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t},$$

siempre que

$$|qe^t| < 1.$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}.$$

Ejemplo

Supongamos que la probabilidad de aprobar un examen en cada intento es 0,4, y que los intentos son independientes. Sea X el número de intento en el que se aprueba por primera vez.

Entonces:

$$X \sim \text{Geo}(0,4).$$

La probabilidad de aprobar por primera vez en el tercer intento es:

$$P(X = 3) = (0,6)^2(0,4).$$

La esperanza es:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0,4} = 2,5.$$

Advertencia

Existen dos formas habituales de definir la distribución geométrica:

- número de ensayos hasta el primer éxito: soporte $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- número de fracasos antes del primer éxito: soporte $\{0, 1, 2, \dots\}$.

En estos apuntes usamos la primera versión. La segunda versión se trabajará en clase. Cambia la función de masa y la esperanza, entre otras funciones. Te animo a calcularlas y seguirlas en clase.

3.10.5. Distribución binomial negativa

La distribución binomial negativa generaliza la geométrica. Modeliza el número de ensayos necesarios hasta obtener r éxitos.

Se utiliza cuando:

- se repiten ensayos de Bernoulli independientes;
- la probabilidad de éxito en cada ensayo es constante e igual a p ;
- se observa en qué ensayo aparece el éxito número r .

Parámetros

La distribución binomial negativa depende de dos parámetros:

$$r \in \mathbb{N}, \quad p \in (0, 1].$$

Donde:

- r es el número de éxitos que queremos conseguir;
- p es la probabilidad de éxito en cada ensayo.

Escribimos:

$$q = 1 - p.$$

Notación

Si X sigue una distribución binomial negativa de parámetros r y p , escribimos:

$$X \sim BN(r, p).$$

Dominio o soporte

En estos apuntes tomamos X como el número de ensayos necesarios hasta obtener el éxito número r . Por tanto:

$$S_X = \{r, r + 1, r + 2, \dots\}.$$

Función de masa

Para que el éxito número r ocurra en el ensayo k , debe ocurrir que:

- en los primeros $k - 1$ ensayos haya exactamente $r - 1$ éxitos;
- en el ensayo k haya un éxito.

Por tanto:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \dots$$

Es decir:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.$$

Función de distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Como X es discreta:

$$F_X(x) = \sum_{k=r}^{\lfloor x \rfloor} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}, \quad x \geq r.$$

Y:

$$F_X(x) = 0 \quad \text{si } x < r.$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{rq}{p^2}.$$

Cálculo de probabilidades

La probabilidad de que el éxito número r ocurra exactamente en el ensayo k es:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.$$

La probabilidad de que el éxito número r ocurra como mucho en el ensayo k es:

$$P(X \leq k) = \sum_{j=r}^k \binom{j-1}{r-1} p^r q^{j-r}.$$

Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t} \right)^r,$$

siempre que

$$|qe^t| < 1.$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} \right)^r.$$

Ejemplo

Supongamos que la probabilidad de aprobar un examen en cada intento es 0,4, y que los intentos son independientes. Sea X el número de intento en el que se consigue aprobar por segunda vez.

Entonces:

$$X \sim BN(2, 0, 4).$$

La probabilidad de obtener el segundo aprobado en el quinto intento es:

$$P(X = 5) = \binom{5-1}{2-1} (0,4)^2 (0,6)^{5-2}.$$

Es decir:

$$P(X = 5) = \binom{4}{1} (0,4)^2 (0,6)^3.$$

La esperanza es:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{0,4} = 5.$$

Idea clave

La distribución geométrica es un caso particular de la binomial negativa cuando $r = 1$.

Advertencia

Igual que ocurre con la geométrica, existen distintas parametrizaciones de la binomial negativa. En estos apuntes usamos la versión que cuenta el número total de ensayos hasta obtener r éxitos.

3.10.6. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson modeliza el número de veces que ocurre un suceso en un intervalo de tiempo, espacio o cualquier otra unidad de observación, cuando los sucesos ocurren de forma independiente y con una tasa media constante.

Se utiliza, por ejemplo, para modelizar:

- número de llamadas que recibe una centralita en una hora;
- número de errores tipográficos por página;
- número de accidentes en un tramo de carretera durante un periodo;
- número de llegadas a una cola en un intervalo de tiempo.

Parámetro

La distribución de Poisson depende de un único parámetro:

$$\lambda > 0.$$

El parámetro λ representa el número medio de ocurrencias en el intervalo considerado.

Notación

Si X sigue una distribución de Poisson de parámetro λ , escribimos:

$$X \sim P(\lambda).$$

Dominio o soporte

La variable X cuenta ocurrencias, por tanto:

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Función de masa

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Función de distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Como X es discreta:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad x \geq 0.$$

Y:

$$F_X(x) = 0 \quad \text{si } x < 0.$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \lambda.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \lambda.$$

Idea clave

En una distribución de Poisson, la esperanza y la varianza coinciden:

$$\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda.$$

Cálculo de probabilidades

La probabilidad de observar exactamente k ocurrencias es:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

La probabilidad de observar como mucho k ocurrencias es:

$$P(X \leq k) = \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}.$$

La probabilidad de observar al menos k ocurrencias es:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1).$$

Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)).$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

Ejemplo

Supongamos que una oficina recibe de media 3 llamadas por hora. Sea X el número de llamadas recibidas en una hora.

Entonces:

$$X \sim P(3).$$

La probabilidad de recibir exactamente 2 llamadas en una hora es:

$$P(X = 2) = e^{-3} \frac{3^2}{2!}.$$

La esperanza y la varianza son:

$$\mathbb{E}(X) = 3,$$

$$\text{Var}(X) = 3.$$

Advertencia

La distribución de Poisson se usa para contar ocurrencias. Su soporte empieza en 0, porque puede no ocurrir ningún suceso en el intervalo observado.

3.11. Distribuciones conocidas de probabilidad continuas

En esta sección estudiaremos algunas de las distribuciones continuas más importantes. Para cada una seguiremos, siempre que sea posible, la misma estructura:

- parámetros;
- dominio o soporte;
- función de densidad;
- función de distribución;
- esperanza;
- varianza;
- cálculo de probabilidades;
- función generatriz de momentos;
- función característica;
- ejemplos.

3.11.1. Distribución uniforme continua

La distribución uniforme continua modeliza una variable que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo, de forma que todos los subintervalos de igual longitud tienen la misma probabilidad.

Parámetros

La distribución uniforme continua depende de dos parámetros:

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b.$$

Notación

Si X sigue una distribución uniforme continua en el intervalo $[a, b]$, escribimos:

$$X \sim U(a, b).$$

Dominio o soporte

$$S_X = [a, b].$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Cálculo de probabilidades

Si $a \leq c < d \leq b$, entonces:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}.$$

Idea clave

En una uniforme continua, la probabilidad de un intervalo solo depende de su longitud.

Función generatriz de momentos

Para $t \neq 0$,

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}.$$

Además,

$$M_X(0) = 1.$$

Función característica

Para $t \neq 0$,

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Además,

$$\varphi_X(0) = 1.$$

Ejemplo

Si un autobús pasa cada 10 minutos y una persona llega al azar a la parada, el tiempo de espera X puede modelizarse como:

$$X \sim U(0, 10).$$

Entonces:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{0 + 10}{2} = 5.$$

La probabilidad de esperar entre 2 y 6 minutos es:

$$P(2 \leq X \leq 6) = \frac{6 - 2}{10 - 0} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

3.11.2. Distribución exponencial

La distribución exponencial modeliza tiempos de espera hasta que ocurre un suceso.

Aparece, por ejemplo, al estudiar el tiempo hasta la llegada de una llamada, el tiempo hasta que falla un componente o el tiempo entre sucesos de un proceso de Poisson.

Parámetro

La distribución exponencial depende de un parámetro:

$$\lambda > 0.$$

El parámetro λ representa la tasa de ocurrencia del suceso.

Notación

$$X \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Dominio o soporte

$$S_X = [0, \infty).$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Cálculo de probabilidades

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}.$$

Además, si $0 \leq a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda.$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Ejemplo

Si el tiempo de espera hasta recibir una llamada sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 2$, entonces:

$$X \sim \text{Exp}(2).$$

La esperanza es:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}.$$

La probabilidad de esperar más de 1 unidad de tiempo es:

$$P(X > 1) = e^{-2}.$$

Idea clave

La distribución exponencial tiene la propiedad de falta de memoria:

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

Esto significa que el tiempo que ya hemos esperado no modifica la distribución del tiempo restante.

3.11.3. Distribución gamma

La distribución gamma generaliza la distribución exponencial. Puede interpretarse como el tiempo de espera hasta que ocurren varios sucesos en un proceso de Poisson.

Parámetros

Usaremos la parametrización con parámetro de forma α y parámetro de tasa λ :

$$\alpha > 0, \quad \lambda > 0.$$

Notación

$$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda).$$

Dominio o soporte

$$S_X = [0, \infty).$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Función de distribución

No suele tener una expresión elemental sencilla. Se escribe como:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du, \quad x \geq 0.$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Cálculo de probabilidades

Si $0 \leq a < b$, entonces:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Equivalently,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx.$$

Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha, \quad t < \lambda.$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^\alpha.$$

Ejemplo

Si el tiempo hasta que ocurren 3 llegadas en un proceso con tasa $\lambda = 2$ se modeliza mediante una gamma, entonces:

$$X \sim \Gamma(3, 2).$$

La esperanza es:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}.$$

La varianza es:

$$\text{Var}(X) = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

Idea clave

La distribución exponencial es un caso particular de la gamma:

$$\text{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda).$$

3.11.4. Distribución beta

La distribución beta se utiliza para modelizar variables continuas que toman valores en el intervalo $[0, 1]$, como proporciones, porcentajes o probabilidades.

Parámetros

La distribución beta depende de dos parámetros:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Notación

$$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta).$$

Dominio o soporte

$$S_X = [0, 1].$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

es la función beta.

Función de distribución

No suele tener expresión elemental sencilla. Se escribe como:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{B(\alpha, \beta)} u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Cálculo de probabilidades

Si $0 \leq a < b \leq 1$, entonces:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Equivalentemente,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Función generatriz de momentos

No tiene, en general, una expresión elemental sencilla. Puede escribirse formalmente como:

$$M_X(t) = \int_0^1 e^{tx} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = \int_0^1 e^{itx} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Ejemplo

Si queremos modelizar una proporción aleatoria que siempre está entre 0 y 1, podemos usar una beta. Por ejemplo:

$$X \sim \text{Beta}(2, 3).$$

Su esperanza es:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}.$$

Idea clave

La distribución uniforme continua en $[0, 1]$ es un caso particular de la beta:

$$U(0, 1) = \text{Beta}(1, 1).$$

3.11.5. Distribución Weibull

La distribución Weibull se utiliza frecuentemente en fiabilidad y supervivencia. Sirve para modelizar tiempos hasta fallo, duración de componentes o tiempos de vida.

Parámetros

Usaremos la parametrización con parámetro de forma k y parámetro de escala λ :

$$k > 0, \quad \lambda > 0.$$

Notación

$$X \sim \text{Weibull}(k, \lambda).$$

Dominio o soporte

$$S_X = [0, \infty).$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-(x/\lambda)^k}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right].$$

Cálculo de probabilidades

Para $x \geq 0$:

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}.$$

$$P(X > x) = e^{-(x/\lambda)^k}.$$

Si $0 \leq a < b$, entonces:

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-(a/\lambda)^k} - e^{-(b/\lambda)^k}.$$

Función generatriz de momentos

No tiene una expresión elemental sencilla en general. Formalmente:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} dx,$$

cuando dicha integral exista.

Función característica

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} dx.$$

Ejemplo

Si el tiempo de vida de una máquina se modeliza mediante:

$$X \sim \text{Weibull}(2, 10),$$

entonces la probabilidad de que falle antes de 5 unidades de tiempo es:

$$P(X \leq 5) = 1 - e^{-(5/10)^2}.$$

Idea clave

La distribución exponencial es un caso particular de Weibull cuando $k = 1$.

3.11.6. Distribución Normal

La distribución Normal es una de las distribuciones más importantes de la estadística. Aparece de forma natural en numerosos fenómenos y tiene un papel central en la inferencia estadística.

Parámetros

Depende de dos parámetros:

$$\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Donde:

- μ es la media;
- σ es la desviación típica.

Notación

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Dominio o soporte

$$S_X = \mathbb{R}.$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Función de distribución

No tiene una expresión elemental. Se escribe como:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right) du.$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \mu.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Cálculo de probabilidades

Las probabilidades se calculan tipificando.

Si

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

entonces

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Por tanto,

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right).$$

Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Ejemplo

Si

$$X \sim N(10, 4),$$

entonces:

$$\mu = 10, \quad \sigma^2 = 4, \quad \sigma = 2.$$

La probabilidad

$$P(8 \leq X \leq 12)$$

se calcula tipificando:

$$P(8 \leq X \leq 12) = P\left(\frac{8-10}{2} \leq Z \leq \frac{12-10}{2}\right).$$

Es decir:

$$P(8 \leq X \leq 12) = P(-1 \leq Z \leq 1).$$

Idea clave

La normal estándar es el caso particular:

$$Z \sim N(0, 1).$$

3.11.7. Distribución chi-cuadrado

La distribución chi-cuadrado aparece como suma de cuadrados de variables normales estándar independientes. Es fundamental en inferencia estadística.

Observación. Esta distribución se estudiará con más detalle en el tema 6, al tratar distribuciones asociadas al muestreo.

Parámetro

Depende de un parámetro:

$$\nu \in \mathbb{N}.$$

El parámetro ν se llama número de grados de libertad.

Notación

$$X \sim \chi_\nu^2.$$

Definición como suma de normales

Si

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_\nu$$

son variables independientes con distribución normal estándar,

$$Z_i \sim N(0, 1),$$

entonces

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_\nu^2$$

sigue una distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad:

$$X \sim \chi_\nu^2.$$

Dominio o soporte

$$S_X = [0, \infty).$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Función de distribución

No tiene expresión elemental sencilla. Se escribe como:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} u^{\nu/2-1} e^{-u/2} du.$$

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \nu.$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = 2\nu.$$

Cálculo de probabilidades

Las probabilidades se calculan mediante tablas o software estadístico:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-\nu/2}, \quad t < \frac{1}{2}.$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = (1 - 2it)^{-\nu/2}.$$

Ejemplo

Si

$$X \sim \chi_5^2,$$

entonces:

$$\mathbb{E}(X) = 5,$$

y

$$\text{Var}(X) = 2 \cdot 5 = 10.$$

Idea clave

La chi-cuadrado es un caso particular de la gamma:

$$\chi_\nu^2 = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

usando la parametrización con tasa.

3.11.8. Distribución t de Student

La distribución t de Student aparece al trabajar con medias muestrales cuando la varianza poblacional es desconocida. Es especialmente importante en intervalos de confianza y contrastes sobre la media.

Observación. Esta distribución se estudiará con más detalle en el tema 6, al tratar distribuciones asociadas al muestreo.

Parámetro

Depende de un parámetro:

$$\nu \in \mathbb{N}.$$

El parámetro ν representa los grados de libertad.

Notación

$$T \sim t_\nu.$$

Definición mediante normal y chi-cuadrado

Si

$$Z \sim N(0, 1),$$

$$U \sim \chi_{\nu}^2,$$

y Z y U son independientes, entonces

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}}$$

sigue una distribución t de Student con ν grados de libertad:

$$T \sim t_{\nu}.$$

Dominio o soporte

$$S_T = \mathbb{R}.$$

Función de densidad

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Función de distribución

No tiene expresión elemental sencilla. Se denota por:

$$F_T(t) = P(T \leq t).$$

En la práctica, sus probabilidades se calculan mediante tablas o software estadístico.

Esperanza

Si $\nu > 1$,

$$\mathbb{E}(T) = 0.$$

Si $\nu \leq 1$, la esperanza no existe.

Varianza

Si $\nu > 2$,

$$\text{Var}(T) = \frac{\nu}{\nu - 2}.$$

Si $1 < \nu \leq 2$, la varianza no existe, aunque la esperanza sí existe.

Cálculo de probabilidades

Las probabilidades se calculan usando su función de distribución:

$$P(a \leq T \leq b) = F_T(b) - F_T(a).$$

Por simetría,

$$P(T \leq -a) = P(T \geq a).$$

Función generatriz de momentos

La función generatriz de momentos no existe, salvo en $t = 0$.

Función característica

La función característica existe siempre, aunque su expresión explícita requiere funciones especiales. En estos apuntes la escribiremos formalmente como:

$$\varphi_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dx.$$

Ejemplo

Si

$$T \sim t_{10},$$

entonces:

$$\mathbb{E}(T) = 0,$$

porque $10 > 1$.

Además,

$$\text{Var}(T) = \frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Idea clave

La distribución t de Student se parece a la normal estándar, pero tiene colas más pesadas. A medida que aumentan los grados de libertad, se aproxima a la normal estándar.

3.11.9. Distribución F de Snedecor

La distribución F de Snedecor aparece como cociente de dos variables chi-cuadrado independientes divididas por sus grados de libertad. Es fundamental en el análisis de la varianza y en contrastes de varianzas.

Observación. Esta distribución se estudiará con más detalle en el tema 6, al tratar distribuciones asociadas al muestreo.

Parámetros

Depende de dos parámetros:

$$d_1, d_2 \in \mathbb{N}.$$

Estos parámetros representan los grados de libertad del numerador y del denominador.

Notación

$$X \sim F_{d_1, d_2}.$$

Definición mediante chi-cuadrado

Si

$$U \sim \chi_{d_1}^2, \quad V \sim \chi_{d_2}^2,$$

y U y V son independientes, entonces

$$X = \frac{U/d_1}{V/d_2}$$

sigue una distribución F de Snedecor con d_1 y d_2 grados de libertad:

$$X \sim F_{d_1, d_2}.$$

Dominio o soporte

$$S_X = [0, \infty).$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{d_1/2} x^{d_1/2-1} \left(1 + \frac{d_1}{d_2}x\right)^{-(d_1+d_2)/2}, \quad x > 0.$$

Función de distribución

No tiene expresión elemental sencilla. Se denota por:

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

En la práctica, las probabilidades se calculan con tablas o software estadístico.

Esperanza

Si $d_2 > 2$,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{d_2}{d_2 - 2}.$$

Si $d_2 \leq 2$, la esperanza no existe.

Varianza

Si $d_2 > 4$,

$$\text{Var}(X) = \frac{2d_2^2(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)}.$$

Si $d_2 \leq 4$, la varianza no existe.

Cálculo de probabilidades

Las probabilidades se calculan mediante la función de distribución:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Función generatriz de momentos

La función generatriz de momentos no existe, salvo en $t = 0$.

Función característica

La función característica existe siempre, aunque no suele escribirse en forma elemental. Formalmente:

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} f_X(x) dx.$$

Ejemplo

Si

$$X \sim F_{5,10},$$

entonces la esperanza existe porque $d_2 = 10 > 2$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

La varianza existe porque $d_2 = 10 > 4$:

$$\text{Var}(X) = \frac{2 \cdot 10^2(5 + 10 - 2)}{5(10 - 2)^2(10 - 4)}.$$

Idea clave

La distribución F aparece al comparar varianzas y será especialmente importante en inferencia estadística.

3.12. Resumen comparativo entre variables discretas y continuas

Resumen		
Concepto	Variable discreta	Variable continua
Soporte	Conjunto finito o numerable de valores.	Intervalo o unión de intervalos de la recta real.
Ejemplo	Lanzamiento de un dado: $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.	Densidad creciente: $f_X(x) = 2x$ en $[0, 1]$, con $S_X = [0, 1]$.
Función asociada	Función de masa, probabilidad o cuantía.	Función de densidad de probabilidad.
Notación habitual	$p_X(x) = P(X = x)$.	$f_X(x)$.
Forma típica	$p_X(x) = \begin{cases} P(X = x), & x \in S_X, \\ 0, & x \notin S_X. \end{cases}$	$f_X(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S_X, \\ 0, & x \notin S_X. \end{cases}$
Función de distribución	$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i).$	$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$
Tipo de gráfica de F_X	Escalonada.	Continua.
Probabilidad de un intervalo	$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} p_X(x_i).$	$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a).$
Esperanza	$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i \in S_X} x_i p_X(x_i).$	$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$
Esperanza de una función	$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in S_X} g(x_i) p_X(x_i).$	$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$
Momento respecto del origen de orden r	$\alpha_r = \mathbb{E}(X^r) = \sum_{x_i \in S_X} x_i^r p_X(x_i).$	$\alpha_r = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx.$
Momento central de orden r	$\beta_r = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^r].$	$\beta_r = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^r].$
Varianza	$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$	$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$
Cálculo de $\mathbb{E}(X^2)$	$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x_i \in S_X} x_i^2 p_X(x_i).$	$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx.$
Función generatriz de momentos	$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x_i \in S_X} e^{tx_i} p_X(x_i).$	$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx.$
Función característica	$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{x_i \in S_X} e^{itx_i} p_X(x_i).$	$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx.$